

## EBOB ve EKOK

### En Büyük Ortak Bölen: (EBOB)

a ve b en az biri sıfırdan farklı iki tam sayı olsun. a ve b nin ortak bölenlerinin en büyüğüne a ile b nin en büyük ortak böleni denir.

EBOB (a,b) ile gösterilir.

### Bilgi Kutusu

a ve b tam sayılarının ortak asal çarpanı yoksa EBOB 1 dir.

Başka bir ifadeyle EBOB (a,b) = 1 ise a ve b sayıları aralarında asaldır.

### Bilgi Kutusu

Verilen iki sayının en büyük ortak böleni bu iki sayının toplamını, farkını ve çarpımını da tam böler.

### Örnek:

120, 150 ve 180 sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.

Çözüm:

120	150	180	2
60	75	90	2
30	75	45	2
15	75	45	3
5	25	15	3
5	25	5	5
1	5	1	5
	1		

$$\text{EBOB}(120, 150, 180) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ = 30$$

olarak bulunur.

### Bilgi Kutusu

İki ya da daha fazla tam sayının EBOB'u bulunurken verilen sayılar önce asal çarpanlarına ayrılır sonra ortak olan asal çarpanların en küçük üslüleri alınıp çarpılır. Elde edilen sayı verilen sayıların EBOB'u olur.

### Örnek:

120, 150 ve 180 sayılarının en büyük ortak bölenini yukarıda verilen bilgidен yararlanarak bulalım.

Çözüm:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

2, 3 ve 5 verilen sayıların hepsinde ortak asal çarpanı olduğundan bu asal çarpanların en küçük üslüleri alınır;

$$\text{EBOB}(120, 150, 180) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

olarak bulunur.

### Örnek:

EBOB ları 15 olan farklı iki sayının toplamının en az kaç olduğunu bulalım.

Çözüm:

$$1. \text{ sayı} = 15 \cdot 1 = 15$$

$$2. \text{ sayı} = 15 \cdot 2 = 30$$

$$\text{Toplam} = 15 + 30 = 45 \text{ bulunur.}$$

### Örnek:

EBOB ları 9 olan farklı üç sayının toplamının en az kaç olduğunu bulalım.

### Çözüm:

1. sayı =  $9 \cdot 1 = 9$

2. sayı =  $9 \cdot 2 = 18$

3. sayı =  $9 \cdot 3 = 27$

Toplam =  $9 + 18 + 27 = 54$  bulunur.

### En Küçük Ortak Kat: (EKOK)

a ve b sıfırdan farklı tam sayılar olsun. a ve b nin pozitif ortak katlarının en küçüğüne a ve b nin en küçük ortak katı denir. EKOK(a,b) ile gösterilir.

### Örnek:

36 ve 48 in en küçük ortak katını bulalım.

### Çözüm:

36	48	2
18	24	2
9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1		

$EKOK(36, 48) = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9$   
 $= 144$  bulunur.

### Bilgi Kutusu

1 den büyük iki yada daha çok doğal sayının en küçük ortak katını bulmak için sayılar asal çarpanlarına ayrılır ve ortak olan asal çarpanların en büyük üslüleri ile ortak olmayan çarpanların tümü çarpılır.

### Örnek:

72 ve 90 nın en küçük ortak katını bulalım.

### Çözüm:

1. yol	72	90	2
	36	45	2
	18	45	2
	9	45	3
	3	15	3
	1	5	5
		1	

$EKOK(72, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5$   
 $= 360$  bulunur.

### 2. Yol

$72 = 2^3 \cdot 3^2$        $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$EKOK(72, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$   
 $= 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$  bulunur.

### Bilgi Kutusu

a ve b aralarında asal iki sayı olmak üzere;  
 $EKOK(a,b)=a \cdot b$  ve  $EBOB(a,b)=1$  dir.

### Örnek:

$3x$  ve  $5y$  sayıları aralarında asal sayılar olmak üzere;

$EBOB(3x, 5y) + EKOK(3x, 5y) = 46$

ise  $x + y$  toplamını bulalım.

### Çözüm:

3x ve 5y sayıları aralarında asal olduğundan;

$$EBOB(3x, 5y) = 1 \text{ ve}$$

$$EKOK(3x, 5y) = 3x \cdot 5y \text{ dir.}$$

$$EBOB(3x, 5y) + EKOK(3x, 5y) = 46$$

$$1 + 3x \cdot 5y = 46$$

$$15xy = 45$$

$$x \cdot y = 3$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 3 \text{ veya}$$

$$x = 3, y = 1 \text{ olur.}$$

$$x + y = 1 + 3 = 4 \text{ bulunur.}$$

### Bilgi Kutusu

İki sayının EBOB u ile EKOK unun çarpımı o sayıların çarpımına eşittir.  $EBOB(a,b)=m$  ve  $EKOK(a,b)=n$  ise  $a \cdot b = m \cdot n$  dir.

### Örnek:

45 ile x sayısının en büyük ortak böleni 6, en küçük ortak katı 180 dir.

Buna göre x sayısını bulalım.

### Çözüm:

$$EBOB(45, x) = 6 \text{ ve } EKOK(45, x) = 180$$

olduğundan;

$$45 \cdot x = 6 \cdot 180$$

$$45 \cdot x = 1080$$

$$x = 24 \text{ bulunur.}$$

### Örnek:

En küçük ortak katları 24 olan farklı iki sayının toplamlarının en büyük ve en küçük değerini bulalım.

### Çözüm:

Sayılar a ve b olsun.

En büyük değer bulunurken; sayılardan biri EKOK un kendisi seçilir diğer sayı EKOK un yarısı olarak belirlenir.

$$\left. \begin{array}{l} a = 24 \\ b = 12 \end{array} \right\} a + b = 36 \text{ (en büyük değer)}$$

En küçük değer bulunurken sayıların çarpımı EKOK u verecek şekilde birbirine en yakın sayılar seçilir.

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 8 \end{array} \right\} a + b = 11 \text{ (en küçük değer)}$$

### Bilgi Kutusu

Birbirinin katı olan iki sayının EBOB u küçük olan sayıya, EKOK u ise büyük olan sayıya eşittir.

### Örnek:

15 ile 45 sayılarının EBOB ve EKOK unu bulalım.

### Çözüm:

$$EBOB(15,45) = 15$$

$$EKOK(15,45) = 45$$

## PROBLEMLER:

### Örnek:

90 kg, 120 kg ve 150 kg lık çuvalardaki pirinç birbirine karıştırılmadan ve hiç artmayacak şekilde eşit ağırlıktaki paketlere konulacaktır. Bu iş için en az kaç paket gerektiğini bulalım.

### Çözüm:

İstenilen paketlerin ağırlığı 90, 120 ve 150 nin en büyük ortak böleni olur.

90	120	150	2
45	60	75	2
45	30	75	2
45	15	75	3
15	5	25	3
5	5	25	5
1	1	5	5
		1	

$$\text{EBOB}(90, 120, 150) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \text{ kg}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{90 \text{ kg}}{30 \text{ kg}} = 3 \text{ paket} \\ \frac{120 \text{ kg}}{30 \text{ kg}} = 4 \text{ paket} \\ \frac{150 \text{ kg}}{30 \text{ kg}} = 5 \text{ paket} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Toplam} = 3 + 4 + 5 \\ = 12 \\ \text{pakete ihtiyaç vardır.} \end{array}$$

### Örnek:

Eni 18 m, boyu 42 m olan bir bahçenin etrafına eşit ve en geniş aralıklarla ağaçlar dikilecektir.

Bu iş için kaç ağacın gerekli olduğunu bulalım.

### Çözüm:

İki ağaç arasındaki uzaklık 18 ve 42 nin en büyük ortak böleni olmalıdır.

18	42	2
9	21	3
3	7	3
1	7	7
	1	

$$\text{EBOB}(18, 42) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}$$

$$\text{Çevre} = 2 \cdot (18 + 42) = 120 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{Ağaç sayısı} &= \frac{\text{Çevre}}{\text{İki ağaç arası uzaklık}} \\ &= \frac{120}{6} = 20 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

### Örnek:

Eni 120 cm, boyu 150 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir karton özdeş (eşit alanlı) karelere ayrılacaktır.

Hiç karton artmamak şartıyla en az kaç tane kare elde edileceğini bulalım.

### Çözüm:

Elde edilecek küçük karelerin bir kenar uzunluğu EBOB(120, 150) cm dir.

120	150	2
60	75	2
30	75	2
15	75	3
5	25	5
1	5	5
	1	

$$\text{EBOB}(120, 150) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$$

olup istenen karelerin bir kenar uzunluğu 30 cm dir.

$$\begin{aligned} \text{Kare sayısı} &= \frac{\text{Dikdörtgenin Alanı}}{\text{Karenin Alanı}} \\ &= \frac{120 \cdot 150}{30 \cdot 30} = 20 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

### Örnek:

Bir torbadaki bilyeler dörder, beşer ve altışar sayıldığında her seferinde 2 bilye artmaktadır.

Torbadaki bilye sayısı 240 ile 250 arasında olduğuna göre torbada kaç bilye olduğunu bulalım.

### Çözüm:

Torbadaki bilye sayısı 4, 5 ve 6'nın en küçük ortak katının bir  $k$  katından 2 fazladır. O halde bilye sayısı  $A$  ise

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \\ \hline 1 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$A = \text{EKOK}(4, 5, 6) \cdot k + 2$$

$$A = (2^2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot k + 2$$

$$A = 60 \cdot k + 2$$

$A$  sayısı 240 ile 250 arasında olduğundan  $k = 4$  seçelim.

$$A = 60 \cdot 4 + 2 = 242 \text{ bulunur.}$$

### Örnek:

Bir okuldaki öğrenciler üçerli sayılırsa 2, beşerli sayılırsa 4 ve yedişerli sayılırsa 6 öğrenci artmaktadır.

Okulda 450 ile 550 arasında öğrenci olduğuna göre kaç öğrenci olduğunu bulalım.

### Çözüm:

Öğrenci sayısı  $A$  olsun.

$$A = 3a + 2 = 5b + 4 = 7c + 6$$

Fark = 1      Fark = 1      Fark = 1

Sayılar ile kalanlar arasındaki fark eşit olduğundan  $A$  sayısı 3, 5 ve 7'nin en küçük ortak katının  $k$  katından 1 eksiktir.

$$A = \text{EKOK}(3, 5, 7) \cdot k - 1$$

$$A = 105 \cdot k - 1 \quad (k = 5 \text{ seçilirse})$$

$$A = 105 \cdot 5 - 1$$

$$A = 525 - 1$$

$$A = 524 \text{ bulunur.}$$

### Örnek:

Boyutları 6 cm ve 10 cm olan dikdörtgen şeklindeki karton parçaları bir araya getirilerek bir kare yapılmak istenirse en az kaç tane karton parçasına ihtiyaç olduğunu bulalım.

### Çözüm:

Oluşturulmak istenen karenin bir kenar uzunluğu;  $\text{EKOK}(6, 10) = 30$  cm dir.

$$\text{Dikdörtgen Sayısı} = \frac{\text{Karenin Alanı}}{\text{Dikdörtgenin Alanı}}$$

$$= \frac{30 \cdot 30}{6 \cdot 10} \Rightarrow 15 \text{ tane}$$

karton kullanılmalıdır.

### Örnek:

18, 24 ve 36 dakika aralıklarla çalan üç farklı zilin, üçü birlikte çaldıktan en az kaç dakika sonra tekrar birlikte çalacağını bulalım.

### Çözüm:

18, 24 ve 36'nın en küçük ortak katı bu üç zilin kaç dakika sonra tekrar birlikte çalacağı zamanı verir.

18	24	36		2
9	12	18		2
9	6	9		2
9	3	9		3
3	1	3		3
1		1		

$$\text{EKOK}(18, 24, 36) = 2^3 \cdot 3^2$$

$$= 8 \cdot 9 \Rightarrow 72$$

Bu üç zil birlikte çaldıktan 72 dakika sonra tekrar birlikte çalarlar.

### Örnek:

24, 36 ve x sayılarının EBOB'u 12, EKOK'u 720 olduğuna göre bu şarta uyan en küçük x sayısını bulalım.

### Çözüm:

x sayısı belirlenirken 24, 36, EBOB ve EKOK asal çarpanlarına ayrılır. EKOK'ta olupta 24 ve 36'da olmayan asal çarpanlar x sayısına çarpan olarak yazılır. EBOB x'in doğal çarpanıdır.

$$24 = 2^3 \cdot 3 \quad \text{EBOB} = 2^2 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{EKOK} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$2^4$  sayısı 24 ve 36'da yok, o halde x de olmalı

$3^2$  sayısı 36'da var, x'e yazılmaz

5 sayısı 24 ve 36'da yok, o halde x de olmalı

$$x = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240 \text{ bulunur.}$$